

**Medidas de Pobreza e Desigualdade:
Uma Análise Teórica dos Principais Índices**

Autores

Marcelo Lettieri

Nelson Leitão Paes

Ensaio Sobre Pobreza N° 02

Janeiro de 2006



Medidas de Pobreza e Desigualdade: Uma Análise Teórica dos Principais Índices

Marcelo Lettieri¹

Nelson Leitão Paes²

Resumo

Este artigo apresenta uma análise teórica das principais medidas de pobreza e desigualdade. Para tal análise, primeiramente são definidos os axiomas da pobreza e os princípios básicos que norteiam a construção dos indicadores sociais para, em seguida, serem desenvolvidos os índices de pobreza e de desigualdade mais utilizados e os fundamentos matemáticos e estatísticos necessários à análise dos dados de renda.

Abstract

This article presents a theoretical analysis of the main measures of poverty and inequality. For such analysis, we define the axioms of the poverty and the basic principles that guide the construction of the social measurements for, after that, to develop the indices of poverty and inequality more used and the necessary mathematical and statistical frameworks to the analysis of the income data.

¹ Doutor em Economia – PIMES/UFPE
Professor do Curso de Pós-Graduação em Economia – CAEN/UFC
Pesquisador do Laboratório de Estudos da Pobreza – LEP/CAEN

² Doutor em Economia – UnB
Pesquisador do Laboratório de Estudos da Pobreza – LEP/CAEN

1. INTRODUÇÃO

A maior parte da literatura sobre desigualdade de renda e pobreza concentrou-se em questões éticas, em particular em como definir medidas eticamente justificáveis desses fenômenos. Embora a classe de índices admissíveis de desigualdade ou de pobreza seja restringida por considerações éticas, remanescem, ainda, muitas maneiras diferentes de quantificar a extensão em que a pobreza ou a desigualdade atinge uma dada sociedade.

O conceito de dominância estocástica trouxe alguma ordem ao estudo de índices geralmente usados. Se, na comparação de duas populações, for possível estabelecer que a distribuição de renda em um delas domina estocasticamente uma outra, então se pode mostrar que há uma classe inteira de índices diferentes que ordena as duas populações da mesma maneira. Há, entretanto, diferentes ordens possíveis de dominância estocástica, e classes diferentes de índices correspondentes às diferentes ordens. Além disso, quando se está interessado na pobreza, é geralmente de interesse comparar rendas somente a partir de um ponto inicial de pobreza apropriadamente definido (linhas de indigência e pobreza).

Embora a recente ênfase nos estudos referentes ao atendimento das necessidades básicas e ao desenvolvimento humano tenha advogado que além da renda, outros atributos de bem-estar como saúde, habitação, meio-ambiente, bens-públicos e alfabetização devem ser considerados na construção de índices de pobreza e de desigualdade, trataremos, aqui, tão-somente, dos indicadores unidimensionais, que têm a renda como único parâmetro de bem-estar, por serem estes os de maior utilização na literatura.

Índices compostos têm sido desenvolvidos com o propósito de realizar comparações interpessoais e internacionais - veja, neste sentido, os trabalhos de Chakravarty, Mukherjee e Ranade (1998), Bourguignon e Chakravarty (1999, 2003), Tsui (2002) e Bibi (2003), para o caso de indicadores de pobreza (pobreza multidimensional), e os trabalhos de Kolm (1977), Atkinson e Bourguignon (1982), Maasoumi (1989), Slottje (1991), Mosler (1996), Sen (1987), UNDP (1991-2002) e Chakravarty (2003), para o caso de índices de desigualdade (desigualdade multidimensional).

Neste artigo, apresentaremos uma análise teórica das principais medidas de pobreza e desigualdade. Para tal, definiremos os axiomas da pobreza e os princípios básicos que norteiam a construção dos indicadores de desigualdade e desenvolveremos e analisaremos os índices de pobreza e de desigualdade mais utilizados e os fundamentos matemáticos e estatísticos necessários à execução da análise dos dados de renda.

2 – CONCEITOS BÁSICOS

Antes de iniciar a apresentação e a análise dos diversos indicadores de pobreza e desigualdade, precisamos nos socorrer de algumas definições básicas.

Definição 1. Seja F qualquer FDA em $[0, \infty)$. Então, define-se $H(y)$, uma funcional quantílica, como:

$$H(y) = F^{-1}(y) = \inf\{x: F(x) \geq y\}$$

Ou seja, $H(y)$ fornece a renda dos 100y% mais pobres na distribuição de X .

$$\text{Então, } \mu(X) = \int_0^1 H(t) dt$$

Definição 2. $F^{r+1}(t) = \int_0^t F^r(u) du$, para todo $t \in [0, \infty)$ e $r \geq 1$.

Definição 3. Analogamente, define-se:

$$H^{r+1}(t) = \int_0^t H^r(v) dv,$$

As seqüências $F^{r+1}(t)$ e $H^{r+1}(t)$ permitirão a definição, mais adiante, de uma seqüência de dominâncias estocásticas.

Definição 4 – Função de Lorenz: $L_X: [0,1] \rightarrow [0,1]$, onde:

$$L_X(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t H(y) dy$$

O gráfico de L_X denomina-se curva de Lorenz e $GL_X(t) = \mu L_X(t)$ é a Curva de Lorenz Generalizada.

Definição 5 – Uma medida de desigualdade é um funcional que fornece um valor real para toda distribuição de renda. Exemplo: Índice de Gini: $G(X)$.

$$G(X) = 1 - 2 \int_0^1 L_x dp = 1 - \frac{2}{\mu(X)} \int_0^1 \int_0^p H(t) dt$$

Definição 6 – Seja \mathfrak{S} uma função real sobre o espaço de funções de distribuição (FDA), que representa o bem-estar total. Seja $I_\mu(X)$ uma “função indicador” do conjunto $[\mu, \infty]$, ou seja, uma FDA de uma massa concentrada em μ . Assim, se existe um único número real μ que resolve $\mathfrak{S}(F) = \mathfrak{S}(I_\mu)$, então μ é chamado de média de F para avaliação do bem-estar ou médio bem-estar de F .

$$\text{Notação} \rightarrow \mu_{\mathfrak{S}}(F) = \mu_{\mathfrak{S}}(X).$$

Definição 7 - O “Índice de Desigualdade” é usado para indicar uma função contínua $I: D \rightarrow R$, tal que para qualquer $m, n \in N$, $X \in D^n$, $Y \in D^n$. A notação $I^m(X) \leq I^n(Y)$ significa que a distribuição X não é mais desigual que a distribuição Y .

Definição 8 - Índice Relativo: $I^n(X) = I^n(cX)$, para todo $x \in D^n$ e $c > 0$. Ou seja, um índice relativo não varia em escala.

Definição 9 - Índice Absoluto: $I^n(X) = I^n(X + c1^n)$. Ou seja, um índice absoluto não varia se adicionarmos uma constante a todas as rendas.

Definição 10 – Para todo $n \in N$, diz-se que $Y \in D^n$ é obtido a partir de $X \in D^n$ (ou X a partir de Y) por meio de uma *transferência regressiva* (*transferência progressiva*) se existem duas pessoas i e j tal que $x_k = y_k$ para todo $k \neq i, j$; $y_i - x_i = x_j - y_j > 0$; $x_j \leq x_i$.

Esta definição nos diz que as distribuições de X e Y são idênticas, exceto por uma transferência positiva (ou negativa) de renda do indivíduo j para o indivíduo i , este com uma renda menor do que a de j . Exemplo: Se $Y = (5, 10, 15, 20)$ e $X = (5, 12, 13, 20)$, tem-se que Y foi obtido a partir de X por meio de uma **transferência regressiva**, pois o indivíduo de renda 12 em X transferiu duas unidades de sua renda para o indivíduo de renda 13.

Definição 11 – Para todo $n \in N$, diz-se que $X \in D^n$ é obtido a partir de $Y \in D^n$ (ou Y a partir de X) por meio de um *incremento* (*decremento*) se, para algum i , $x_i = y_i + c$ e $x_j = y_j$ para todo $j \neq i$, onde $c > 0$. Não há necessidade de explicar essa definição.

Definição 12 – Renda Equivalente Igualmente Distribuída de Atkinson-Kolm-Sen (Renda EDE da AKS) $\rightarrow \mathbf{x}_e$.

Seja a Função de Bem-estar social – $W: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, W^n é regular (contínua, crescente e estritamente côncava).

Implicitamente, \mathbf{x}_e é assim definida:

$$W^n(\mathbf{x}_e \mathbf{1}^n) = W^n(X) \quad (1)$$

Portanto, \mathbf{x}_e é o nível de renda a ser possuído por todos da distribuição que tornaria a distribuição existente eticamente indiferente (como medida por W^n).

Dada a regularidade de W^n , podemos resolver (1) e obter $\mathbf{x}_e = E^n(X)$.

$E^n(X)$ é contínua e é uma representação numérica específica de W^n . Então:

$$W^n(X) \geq W^n(Y) \Leftrightarrow E^n(X) \geq E^n(Y) \Leftrightarrow \mathbf{x}_e \geq \mathbf{y}_e.$$

Ou seja, uma distribuição é socialmente melhor do que outra se, e somente se, sua renda EDE é maior.

3 – MEDIDAS DE POBREZA

3.1 - AXIOMAS DA POBREZA: DEFINIÇÕES E DISCUSSÕES

Sen (1976) observou que a avaliação da pobreza requer a solução de dois problemas distintos: (1º) O Problema de Identificação, que constitui em identificar o conjunto de pessoas pobres; e (2º) O Problema de Agregação, que consiste em agregar características do pobre em um indicador (ou índice) de pobreza. O primeiro envolve a especificação de uma linha de pobreza (z) e o segundo, um índice de pobreza P , que pode ser assim definido:

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $X \in R_+^n$ e $Z \subset \mathbb{R}$, sejam:

- i) $z > 0$ exógena com $z \in Z$;
- ii) $Q(X) = \{i: x_i \leq z\}$ o conjunto de pobres (se $<$ em vez de \leq , tem-se uma definição fraca);
- iii) X^P a distribuição de renda dos pobres e \hat{X}^P sua ordenação de “mal-estar”.

Um índice de pobreza P é uma função de valor real definida em $R_+ \times Z$. Então:

$P^{n,1}(X, z)$ é o nível de pobreza associado a X .

Definição 3.1 (Índice de Pobreza Relativo) – Diz-se que $P: R_+ \rightarrow R^1$ é um índice de pobreza relativo se para todo $n \in N$, $X \in R_+^n$, $z \in Z$ e $c > 0$ um escalar qualquer:

$$P^{n,1}(X, z) = P^{n,1}(cX, cz)$$

Definição 3.2 (Índice de Pobreza Absoluto) – Diz-se que $P: R_+ \rightarrow R^1$ é um índice de pobreza absoluto se para todo $n \in N$, $X \in R_+^n$, $z \in Z$ e $c > 0$ um escalar qualquer:

$$P^{n,1}(X, z) = P^{n,1}(X + c1^n, z + c)$$

Seja P um índice arbitrário (relativo ou absoluto) e z dado arbitrariamente. Então, para todo $n \in N$, $X, Y \in R_+^n$, temos os seguinte axiomas principais:

A.1 – Axioma da Focalização:

Se $Q(X) = Q(Y)$ e $x_i = y_i$ para todo $i \in Q(X)$, então $P^{n,1}(X, z) = P^{n,1}(Y, z)$.

Ou seja, o axioma de focalização estabelece que o índice de pobreza deve ser independente das rendas dos não-pobres.

A.2 – Axioma da Monotonicidade Fraca:

Se Y é obtido a partir de X por meio de um decremento na renda de uma pessoa pobre, então:

$$P^{n,1}(X, z) < P^{n,1}(Y, z).$$

Tal axioma afirma, portanto, que uma redução na renda de uma pessoa pobre, mantida as demais constantes, deve aumentar a pobreza.

A.3 – Axioma da Monotonicidade Forte:

Se X é obtido a partir de Y por meio de um incremento na renda de uma pessoa pobre, então:

$$P^{n,1}(X, z) < P^{n,1}(Y, z).$$

A.3 estabelece que um aumento na renda de um indivíduo pobre (incluindo a possibilidade de ele ficar rico) deve reduzir a pobreza. Então, **A.3 \Rightarrow A.2.**

A.4 – Axioma da Transferência Mínima:

Se Y é obtido a partir de X por meio de uma transferência regressiva entre dois pobres (ninguém deixando de ser pobre), então:

$$P^{n,1}(X, z) < P^{n,1}(Y, z).$$

Ou seja, a pobreza aumenta se houver uma transferência regressiva entre dois pobres, com o conjunto de pobres permanecendo o mesmo.

A.5 – Axioma da Transferência Fraca:

Se Y é obtido a partir de X por meio de uma transferência regressiva de um pobre (ninguém deixando de ser pobre), então:

$$P^{n,1}(X, z) < P^{n,1}(Y, z).$$

De forma semelhante ao A.4, o A.5 informa que a pobreza aumenta se houver uma transferência regressiva de um pobre. No entanto, aqui a transferência pode ser para um não pobre.

A.6 – Axioma da Transferência Forte:

Se Y é obtido a partir de X por meio de uma transferência de um pobre para um mais rico (ou menos pobre), então:

$$P^{n,1}(X, z) < P^{n,1}(Y, z).$$

A.6 permite que o beneficiário deixe de ser pobre, ou seja, o conjunto de pobres pode variar. Então, **A.6 \Rightarrow A.5 \Rightarrow A.4.**

A.7 – Axioma da Simetria:

Se Y é obtido a partir de X por meio de uma permutação de rendas, então:

$$P^{n,1}(X, z) = P^{n,1}(Y, z).$$

A.7 estabelece, portanto, que a pobreza não se altera se reordenarmos as rendas. A importância deste axioma é que sendo satisfeito, pode-se definir um índice de pobreza sobre a distribuição ordenada.

A.8 – Axioma da Linha de Pobreza Crescente:

$$P^{n,1}(X, z) \text{ é crescente em } z.$$

Significa que entre duas sociedades idênticas, aquela que possuir uma linha de pobreza mais elevada (maior valor) terá, obviamente, um número maior de pobres.

A.9 – Axioma do Princípio Populacional:

Se $Y = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$ é uma m-replicação de X , com cada $X^{(i)} = X$, então:

$$P^{mn,1}(Y, z) = P^{n,1}(X, z).$$

Em resumo, significa que se uma população é replicada várias (m) vezes, para um dado z , o nível de pobreza da população original e da replicada é o mesmo. Ou seja, A.9 ver a pobreza como um conceito médio, o que permite a comparação da pobreza entre populações e no tempo.

A.10 – Axioma da Continuidade:

$P^{n,1}(X, z)$ é uma função crescente de X .

O objetivo deste axioma é garantir uma baixa sensibilidade do indicador de pobreza a erros de medida na renda.

Esses são os dez principais axiomas referentes aos indicadores de pobreza. Diversos outros foram sugeridos, alguns de elevada importância, mas dada a amplitude de temas que pretendemos abordar neste artigo, não os apresentaremos aqui.

A título de exemplo, Kakwani (1980a) argumenta que um índice de pobreza deve ser mais sensível ao que acontece entre os mais pobres. Com base nisso, formulou os seguintes axiomas: **A.11 - da Sensibilidade Monotônica**; ii) **A.12 - da Sensibilidade decrescente de transferências**; e **A.13 - da Sensibilidade posicional de transferências**. Dada a importância da desagregação da pobreza em subgrupos, foram sugeridos alguns **Axiomas de subgrupos**. Tais axiomas mostram que para qualquer partição da população em subgrupos, a pobreza da população está relacionada aos níveis de pobreza de subgrupos. Como exemplo, podemos citar o **A.14 - Axioma da Consistência do Subgrupo** de Foster e Shorrocks (1991) e o **A.15 - Axioma da Decomposição em Subgrupos**.³

3.2 - ÍNDICES DE POBREZA

Após discussão dos axiomas relativos às medidas de pobreza, passamos imediatamente a apresentação e análise dos principais indicadores unidimensionais. O primeiro e mais utilizado é o P_1 , que mede a proporção de pobres numa dada população.

³ Tais axiomas e as respectivas análises podem ser encontrados em Chakravarty e Muliere (2003b).

I.1. Proporção de Pobres (“Headcount Ratio”) – Seja q o número de pobres numa dada população X , que contém n indivíduos. Define-se P_1 como:

$$P_1^{n,1}(X, z) = \frac{q}{n}$$

P_1 possui, portanto, as seguintes propriedades: (a) é tanto um índice relativo quanto absoluto, (b) satisfaz aos axiomas A.1, A.7, A.8 e A.9, e (c) viola todos os axiomas de transferência e de monotonicidade (A.2 até A.6, A.11 a A.13). A grande desvantagem deste indicador é que ele não mede a intensidade da pobreza. Para resolver este problema foi construído o P_2 , denominado Razão do Hiato de Pobreza.

I.2. Razão do Hiato de Pobreza (“Poverty Gap Ratio”) – É a média das diferenças das rendas dos pobres em relação à linha de pobreza. Matematicamente, tem-se:

$$P_2^{n,1}(X, z) = \frac{\sum_{i \in Q(X)} (z - x_i)}{qz}$$

Aqui, $(z - x_i)$ mede a privação do indivíduo i e qzP_2 fornece o custo total para trazer todos os pobres para a linha de pobreza. P_2 satisfaz A.2, mas viola todos os demais axiomas de transferências.

I.3. Índice de Pobreza de Sen (1976)

Em um trabalho seminal, Sen (1976) sugeriu a seguinte classe de indicadores:

$$P_3^{n,1}(X, z) = a(X, z) \sum_{i \in Q(X)} (z - x_i) v_i(X, z)$$

Aqui, $a(X, z)$ é um coeficiente de normalização e $v_i(X, z)$ um conjunto de pesos para o hiato $(z - x_i)$.

A fim de atribuir maiores pesos para as maiores privações, Sen assumiu v_i igual a ordem do indivíduo i na distribuição de renda. Assim, produziu o seguinte índice:

$$P_3^{n,1}(X, z) = \frac{\sum_{i=1}^q (z - x_i)(q + 1 - i)}{(q + 1)nz}$$

Assumindo que $\mu(X^p) > 0$, para um grande q , P_3 pode ser escrito como:

$$P_3^{n,1}(X, z) = P_1^{n,1} [P_2^{n,1} + (1 - P_2^{n,1})G_p^q] \quad (2)$$

onde G_p^q é o índice de Gini da distribuição de renda dos pobres.

Por sua vez, Blackorby e Donaldson (1980) notaram que P_3 pode ser escrito genericamente como:

$$P_3^{n,1}(X, z) = P_1^{n,1} \left[1 - \frac{E_G^q(X^p)}{z} \right]$$

onde $E_G^q(X^p)$ é a renda EDE avaliada segundo uma função de bem-estar social de Gini.

Assim, ao generalizar P_3 eles propuseram P_4 .

I.4. Índice de Pobreza de Sen-Blackorby-Donaldson

O índice de pobreza P_4 é definido como sendo o produto da proporção de pobres (P_1) pelo hiato relativo entre a linha de pobreza e a renda EDE do pobre. Matematicamente, tem-se:

$$P_4^{n,1}(X, z) = P_1^{n,1} \left[1 - \frac{E^q(X^p)}{z} \right]$$

onde $E^q(X^p)$ é a renda EDE avaliada segundo uma função de bem-estar social regular e homotética. Tal indicador, por construção, é sensível à proporção de pobres; é sensível à intensidade de pobreza e é sensível à desigualdade entre os pobres.⁴ Em relação aos axiomas supradefinidos, P_4 satisfaz A.1, A.2, A.5, A.7 e A.8 e viola A.6, A.9, A.10 e A.14.

Se assumirmos $E^q(X^p) = \frac{\sum_{i=1}^q x_i (q+1-i)^r}{i^r}$, $r > 0$, tem-se o Índice de

Kakwani(1980b), assim representado:

$$P_k^{n,1}(X, z) = \frac{q}{nz \sum_{i=1}^q i^r} \sum_{i=1}^q (z - x_i)(q+1-i)^r$$

Se $r = 0$, então $P_k = P_1 P_2$ e se $r = 1$ tem-se o Índice de Sen.

A desvantagem do Índice de Kakwani é que ele viola A.6, A.9, A.10 e A.14.

I.5. Índice de Pobreza de Giorgi-Crescenzi

Giorgi e Crescenzi (2001) propuseram a substituição do Índice de Gini em P_3 pelo índice de Bonferroni e construíram o seguinte indicador:

⁴ Basta utilizar a relação $E^q(X^p) = \mu[1 - I_{AKS}(X_p)]$ para verificar como se dá esta sensibilidade à desigualdade entre os pobres.

$$P_{GC}^{n,1}(X, z) = P_1^{n,1} \left[1 - \frac{1}{qz} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^i \hat{x}_j \right]$$

Assim, conseguiram manter a sensibilidade à proporção de pobres, à intensidade de pobreza e à desigualdade entre os pobres, além de fazer com que fosse satisfeito o axioma A.13 para todo r .

I.6. Índice Absoluto de Pobreza de Blackorby-Donaldson

P_5 é um índice de pobreza absoluto que define o custo monetário total da pobreza, ou seja, determina quanto se gastaria para acabar com toda a pobreza de uma dada sociedade. Assim,

$$P_5^{n,1}(X, z) = q[z - E^q(X^p)]$$

Sua desvantagem é que ele viola os axiomas A.9, A.10 e A.14.

I.7. Índice de Pobreza de Hamada-Takayama (1977)

Usando distribuições de renda censuradas, eles propuseram o seguinte índice:

$$P_6^{n,1}(X, z) = 1 - \frac{1}{n^2 \mu(X^*)} \sum_{i=1}^n [2(n-i) + 1] \hat{x}_i$$

onde X^* é a distribuição censurada (relacionada a X) e x_i^* é a renda censurada correspondente ao nível de renda x_i . Neste caso, $x_i^* = \min \{ x_i, z \}$ determina que cada renda de um não-pobre seja igualada à linha de pobreza.

I.8. Índice de Chakravarty

Outro índice de interesse é o desenvolvido por Chakravarty. Matematicamente, ele é assim definido:

$$P_7^{n,1}(X, z) = 1 - \frac{E^n(X^*)}{z} \quad (3)$$

Ele varia entre zero (se não existe pobres na população) e um (se todos possuem renda zero) e satisfaz os axiomas A.1, A.2, A.6, A.7, A.8 e A.10, embora viole A.9 e A.12 a A.14.

Assumindo que $\mu(X) > 0$, tem-se: $P_7^{n,1}(X, z) = 1 - \frac{\mu(X^*)[1 - I_{AKS}^n(X^*)]}{z}$

Dado z e X^* , Y^* com mesma média, então:

$$I_{AKS}^n(X^*) \geq I_{AKS}^n(Y^*) \Leftrightarrow P_7^{n,1}(X, z) \geq P_7^{n,1}(Y, z)$$

Ou seja, se a distribuição X^* é mais desigual que a Y^* , então a pobreza na distribuição X é maior que na Y .

I.9. Segundo Índice de Clark-Hemming-Ulph

A partir de P_7 , mas empregando uma função de bem-estar de ordem k e simétrica na média, Clark, Hemming e Ulph (1981) propuseram o seguinte indicador:

$$P_k^{n,1}(X, z) = 1 - \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^*)^k \right]^{\frac{1}{k}}}{z}, \quad \text{para } k < 1 \text{ e } k \neq 0$$

$$= 1 - \frac{\left[\prod_{i=1}^n (x_i^*) \right]^{\frac{1}{n}}}{z}, \quad \text{para } k = 0$$

Com isso conseguiram desenvolver um dos índices mais satisfatórios em termos de obediência aos axiomas previamente definidos. No entanto, ele ainda traz uma desvantagem importante: não é possível decompô-lo em subgrupos (viola A.15).

I.10. Índice Absoluto de Chakravarty (1983)

Na busca de um indicador mais satisfatório, Chakravarty propôs o seguinte índice:

$$P_8^{n,1}(X, z) = [z - E^n(X^*)]$$

P_8 tem as mesmas propriedades que P_7 e ainda tem a propriedade da invariância (P_7 não tem). Ele informa que, se a cada pessoa for dado $[z - E^n(X^*)]$, seu valor tenderá a zero e o custo agregado de eliminação da pobreza será dado por $n[z - E^n(X^*)]$.

I.11. Índice Geral de Chakravarty

Usando a privação do pobre diretamente na construção de um índice de pobreza, Chakravarty propôs, ainda, o seguinte indicador:

$$P_9^{n,1}(X, z) = P_1^{n,1}(X, z) \cdot \frac{g_e}{z}$$

onde g_e mede a privação representativa, isto é, define o nível de privação sofrido por todos os pobres que torna a distribuição socialmente indiferente à distribuição original.

P_9 satisfaz aos axiomas A.2, A.5 e A.7 e viola A.6 e A.10.

Até agora, verificou-se que à medida que os estudos foram sendo desenvolvidos, os indicadores construídos foram se tornando cada vez mais satisfatórios. No entanto,

embora consistentes, eles normalmente não eram passíveis de decomposição. Para resolver tais limitações, foram desenvolvidos novos indicadores.

I.12. Índices que são consistentes e passíveis de decomposição em subgrupos

I.12.1 – Índice de Foster e Shorrocks

Foster e Shorrocks propuseram, então, o seguinte índice:

$$P_{10}^{n,1}(X, z) = \Phi\left[\frac{1}{n} \sum_{i \in Q(X)} f\left(\frac{g_e}{z}\right)\right]$$

onde Φ é uma função contínua decrescente e $f: R_+ \rightarrow R$, contínua, decrescente e estritamente convexa, com $f(t) = 0$ para $t \geq 1$.

Assim definido, ele satisfaz A.1, A.2, A.6, A.7, A.9, A.10 e A.14; e se Φ é um mapeamento na unidade, ele também satisfaz A.15.

Mais precisamente, a família inteira de índices relativos possíveis de decomposição em subgrupos é dado por:

$$P_{11}^{n,1}(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i \in Q(X)} f\left(\frac{x_i}{z}\right)$$

Se $f(t) = 1 - t^e$, $0 < e < 1$, então P_{11} coincide com o P_e de Chakravarty:

$$P_e^{n,1}(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i \in Q(X)} \left[1 - \left(\frac{x_i}{z}\right)^e\right]$$

E se $f(t) = -\log(t)$, $t > 0$, então P_{11} coincide com o P_w de Watts(1968):

$$P_w^{n,1}(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i \in Q(X)} \log\left(\frac{z}{x_i}\right) = P_1^{n,1}(X, z) [I_T^q(X^p) - \log(1 - P_{21}^{n,1}(X, z))]$$

Finalmente, se $f(t) = (1 - t)^\alpha$, então P_{11} se torna o índice de Foster-Greer-Thorbecke (1984), que tem sido o mais utilizado nos estudos de pobreza:

$$P_\alpha^{n,1}(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i \in Q(X)} \left[\frac{(z - x_i)}{z} \right]^\alpha$$

Para $\alpha > 2$, P_α satisfaz todos os axiomas de P_e .

Se $\alpha \rightarrow 0$, então $P_\alpha \rightarrow P_1$; se $\alpha \rightarrow 1$, então $P_\alpha \rightarrow P_1 P_2$; e se $\alpha = 2$, P_α pode ser escrito como: $P_\alpha^{n,1}(X, z) = P_1^{n,1} [(P_2^{n,1})^2 + (1 - P_2^{n,1})^2 (C_p^q)^2]$

Diversos outros índices poderiam ainda ser aqui analisados, mas optamos por nos limitarmos aos até agora apresentados, deixando os demais para uma próxima oportunidade. A título de exemplo, podemos ainda citar os Índices Absoluto e Relativo

de Vaughan (1987), índices que incorporam a função de bem-estar diretamente no indicador; ou, ainda, o Índice de Hagenaars (1987), que traz em seu bojo o conceito de limiar de pobreza.

4. MEDIDAS DE DESIGUALDADE

Como vimos no capítulo anterior, medidas de pobreza focam a situação dos indivíduos ou famílias que se encontram na parte inferior da distribuição de renda e tipicamente requer informações tanto sobre o nível médio de renda como sobre a sua distribuição entre os de renda mais baixa. A desigualdade, por outro lado, é um conceito mais amplo e é definido sobre toda a população e não somente para uma parte abaixo de uma determinada linha (de pobreza ou de indigência).

Como veremos, a maioria das medidas de desigualdade não dependem da média da distribuição, e esta propriedade (de independência da média) é considerada, inclusive, uma propriedade desejável para os indicadores de desigualdade.

Cowell (1998) afirma, bastante apropriadamente, que medir desigualdade é uma tentativa de dar significado a comparações de distribuição de renda em termos de critérios que podem ser derivados de princípios éticos, apelando para construções matemáticas ou simples intuição.

Nesse sentido, a maior parte da literatura sobre a desigualdade de renda tem argumentado que o índice de desigualdade, seja relativo ou absoluto, deve satisfazer a alguns postulados básicos. Analisemos os principais.

4.1. POSTULADOS FUNDAMENTAIS PARA UM ÍNDICE DE DESIGUALDADE

P0 - Postulados de Finetti (1931)

Seja \mathcal{P} o espaço de distribuições de probabilidade com massa concentrada em algum intervalo compacto $I \subset \mathcal{R}$. Define-se, então, as seguintes propriedades:

F1. Monotonicidade Estrita

Seja F_1 e F_2 em \mathcal{P} . Se $F_1(x) \leq F_2(x)$ ($<$ para ao menos um x), então: $\mu_3(F_1) > \mu_3(F_2)$.

Seja, agora, uma combinação convexa de F_1 e F_2 dada por: $F^* = \lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2$, com $\lambda \in]0,1[$. Assim, definimos, a próxima propriedade:

F2. Associatividade

Se F_1 e F_2 em \mathcal{P} são tais que $\mu_{\mathfrak{S}}(F_1) = \mu_{\mathfrak{S}}(F_2)$. Então, para todo F_3 em \mathcal{P} e $\lambda \in]0,1[$,

$$\mu_{\mathfrak{S}}(\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_3) > \mu_{\mathfrak{S}}(\lambda F_2 + (1 - \lambda)F_3).$$

Ou seja, a associatividade requer que a média de F^* não se altere se um dos dois componentes da distribuição é substituído por outro com a mesma média. Em outras palavras, se na avaliação de bem-estar somos indiferentes entre duas distribuições, essa indiferença é preservada se ambas as distribuições são combinadas com uma terceira na mesma proporção.

A partir daí, podemos apresentar o seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Finetti)

Seja I um intervalo compacto e $\mu_{\mathfrak{S}}$ obtido a partir de $\mathfrak{S}(F) = \mathfrak{S}(I_{\mu})$. $\mu_{\mathfrak{S}}$ satisfaz os axiomas da associatividade e da monotonicidade estrita se, e somente se, existe uma função u , contínua e estritamente monotônica, tal que para todo $F \subset \mathcal{P}$

$$\mu_{\mathfrak{S}}(F) = u^{-1}\left(\int_I u(x)dF(x)\right)$$

onde u é única sob uma transformação afim positiva.

A função $u(x)$ é interpretada como a função utilidade individual e $u(\mu_{\mathfrak{S}}(F))$ como o índice de bem-estar de \mathfrak{S} . Se definirmos o bem-estar social de uma sociedade com distribuição de renda F como $W(F)$, temos

$$W(F) = u(\mu_{\mathfrak{S}}(F)) = \int_I u(x)dF(x) = (u(X))$$

Logo, se $u(x)$ é estritamente côncava, a utilidade individual cresce a taxas decrescentes e o bem-estar social cresce quando a renda é transferida de um indivíduo mais rico para um mais pobre.

P1 - Postulado da Simetria (SYM):

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $X \in D^n$, se Y é obtido a partir de X por meio de uma permutação de rendas, então:

$$I^n(X) = I^n(Y).$$

Ou seja, P1 estabelece que a desigualdade não se altera se reordenarmos a distribuição.

P2 - Postulado Populacional (POP):

Se $Y = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$ é uma m-replicação de X , com cada $X^{(i)} = X$, então:

$$I^{mn}(Y) = I^n(X).$$

Em resumo, P2 significa que se uma população é replicada várias (m) vezes, a desigualdade da população original e da replicada é a mesma. Ou seja, P2 vê a desigualdade como um conceito médio, o que permite a comparação entre populações e no tempo.

P3 – Postulado da Transferência de Pigou (1912) –Dalton (1920) - TPD

Para todo $n \in \mathbb{C}$, $Y \in D^n$, se X é obtido a partir de Y por meio de uma transferência progressiva de rendas, então: $I^n(X) < I^n(Y)$.

P3 afirma que a transferência de renda de uma pessoa para outra mais pobre reduz a desigualdade.

P4 – Princípio da Transferência Composta Favorável (TCF)

Para todo $n \in \mathbb{C}$, $Y \in D^n$, X é obtido a partir de Y por meio de uma *transferência composta favorável* se existir i, j, k e l ($i < j \leq k < l$) tal que:

$$x_h = y_h \quad (a)$$

$$x_i - y_i = y_j - x_h; y_i < x_i < y_j; y_i < x_j < y_j$$

$$x_k - y_k = y_l - x_l; x_k < y_k < x_l; x_k < y_l < x_l$$

$$y_i < x_k$$

$$x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2 = y_i^2 + y_j^2 + y_k^2 + y_l^2 \quad (b)$$

Ou seja, uma transferência composta favorável envolve transferências progressivas e regressivas, sendo que aquelas envolvem rendas mais baixas do que estas.

Como a média é a mesma, (a) e (b) garantem que a variância da distribuição original não seja afetada

P5 – Postulado da Sensibilidade à Transferência

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $Y \in D^n$, $I^n(X) < I^n(Y)$ sempre que X é obtido a partir de Y por meio de uma *transferência composta favorável*. Ou seja, P6 implica que uma combinação de uma transferência progressiva e uma regressiva que preserve a ordem, onde esta (a regressiva) é feita em rendas maiores que aquela (progressiva), reduz a desigualdade. Em outras palavras, uma *transferência composta favorável* reduz a desigualdade.

Seja, agora, $\Delta I_{i+t,i}^n(y^*(\delta))$ a redução na desigualdade devido a uma transferência progressiva (que preserva a ordem) de δ unidades de renda da pessoa de ordem $i + t$ para a de ordem i , com $t > 0$, $t \in \mathbb{Z}$. Podemos, então, definir o próximo postulado.

P6 – Postulado da Sensibilidade Posicional à Transferência

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $Y \in D^n$, e para qualquer par de indivíduos i e j , com $j > i$,

$$\Delta I_{i+t,i}^n(y^*(\delta)) > \Delta I_{j+t,j}^n(y^*(\delta))$$

P6 implica que entre duas transferências progressivas, aquela feita entre indivíduos de rendas menores reduz mais a desigualdade.

P7 – Princípio da Transferência sobre θ (TS θ)

Dado um $\theta > 0$ fixo e distribuições ordenadas não-idênticas $X^*, Y^* \in D^n$ com a mesma média, diz-se que X^* foi obtido de Y^* por uma seqüência de transferências sobre θ se existe algum k com $x_i^* \leq \theta$ para $x_i^* - y_i^* \geq 0$, $x_i^* \geq \theta$ para $x_i^* - y_i^* \leq 0$.

Trata-se de uma transferência de uma pessoa com renda maior que θ para alguém com uma renda menor que θ .

P8 – Princípio da Transferência próxima a θ (TP θ)

Dado um $\theta > 0$ fixo e distribuições ordenadas não-idênticas $X^*, Y^* \in D^n$ com a mesma média, diz-se que X^* foi obtido de Y^* por uma seqüência de transferências

próxima a θ se $y_k^* \leq \theta \leq y_{k+1}^*$; $x_i^* \geq y_i^*$ se $i \leq k$; $x_i^* \leq y_i^*$ se $i \geq k$; $y_k^* \leq x_i^* \leq y_{k+1}^*$, se $x_i^* \neq y_i^*$

Trata-se, pois, de transferências onde somente rendas próximas a θ são afetadas.

P9 – Princípio da Transferência em Estrela (TE θ)

Uma transferência em estrela ocorre se ocorrer ou uma transferência sobre θ ou uma transferência próxima a θ . Assim, um índice de desigualdade satisfaz P9 se ele se reduz sob P7 ou P8.

4.2. A ABORDAGEM DE DALTON

Dalton (1920) sugere medir a desigualdade usando “a razão entre o bem-estar total obtido sob uma distribuição uniforme e o bem-estar total obtido sob uma dada distribuição”. Seja, portanto, $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{D}^n$. Então, o valor do bem-estar da distribuição X é dado por:

$$\sum_{i=1}^n u(x_i)$$

onde u é a função utilidade individual (idêntica para todos), crescente e estritamente côncava. O Índice de Dalton é definido por $I_D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{D}^n$,

$$I_D^n(X) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n u(x_i)}{nu(\mu)}$$

Tal índice nos diz em quanto podemos aumentar o bem-estar social distribuindo renda igualmente.

4.3. A ABORDAGEM DE ATKINSON- KOLM- SEN E OUTRAS QUESTÕES

Como a forma da função de bem-estar social de Dalton era muito restritiva, Sen (1976) optou por utilizar a função de bem-estar social $W: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, W^n é regular (contínua, crescente e estritamente côncava). Utilizando a definição de Sen (1976), Atkinson e Kolm propuseram o seguinte índice:

4.3.1 - Índice de Desigualdade (relativo) de AKS

O Índice de Desigualdade (relativo) de AKS – I_{AKS} é assim definido:

Seja uma W^n regular e homotética (pode ser escrita como $\Phi(\tilde{W}^n)$, uma função crescente de uma linear homogênea). Assim, $I_{AKS}: D \rightarrow R^1$, onde para todo $n \in \subseteq, x \in D^n$, pode ser escrito como:

$$I_{AKS}^n(X) = 1 - \frac{\mu_{\tilde{W}}(X)}{\mu(X)} \quad \text{ou} \quad I_{AKS}^n(X) = 1 - \frac{\tilde{W}^n(X)}{\mu \tilde{W}^n(1^n)}$$

Assim, I_{AKS} é contínuo, simétrico e decrescente sob uma transferência progressiva que preserva a ordem. Varia de 0 a 1 e satisfaz os postulados **SYM** e **TPD**.

I_{AKS} fornece a fração da renda agregada que poderia ser poupada sem qualquer perda de bem-estar se a sociedade distribui rendas igualmente e pode ser interpretado como a perda proporcional de bem-estar que surge devido à existência da desigualdade.

Para cada função homotética de bem-estar social, W^n , há um índice de desigualdade relativo.

A título de ilustração considere as duas funções de bem-estar social abaixo:

$$\mu_{\tilde{W}}^r(X) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \right]^{\frac{1}{r}} \quad \text{e} \quad \mu_{\tilde{W}}(X) = \left[\frac{1}{n} \prod_{j=1}^n x_j \right]^{\frac{1}{n}}$$

$\xi = 1 - r$ é o coeficiente de aversão relativa à desigualdade. (veja discussão sobre aversão à desigualdade em Cowell, 1998, p. 30-31).

O Índice de desigualdade de AKS relacionado às duas funções acima é o Índice de Atkinson (1970) que é dado por:

$$I_r^n(X) = 1 - \frac{1}{\mu(X)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \right]^{\frac{1}{r}} \quad \text{ou} \quad I_r^n(X) = 1 - \frac{1}{\mu(X)} \left[\frac{1}{n} \prod_{j=1}^n x_j \right]^{\frac{1}{n}}$$

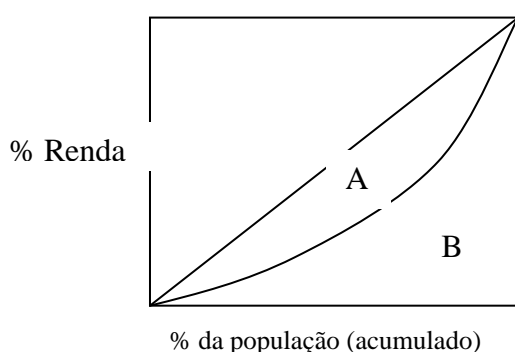
$I_r^n(X)$ satisfaz o axioma da sensibilidade à transferência para todos os valores de $r < 1$ e, para um dado X , $I_r^n(X)$ é decrescente em r .

Para a função de bem-estar social de Gini: $\mu_G(X) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (2(n-i)+1)x_i^*$, o

índice de AKS se transforma no tão conhecido Índice de Gini (I_G), dado por:

$$I_G^n(X) = \frac{1}{2n^2 \mu(X)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i^* - x_j^*|$$

O Índice de Gini é baseado na Curva de Lorenz. Ele é definido graficamente como a razão entre as áreas A e A+B, ou seja, $I_G = A/(A+B)$. Se $A = 0$, temos a igualdade perfeita e, se $B = 0$, a perfeita desigualdade.



4.3.2 - Índice de Desigualdade Absoluto de Blackorby-Donaldson-Kolm (A_{BDK}).

Para todo $n \in \mathbb{C}$, seja $W^n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^1$ uma função regular e transladável (ou seja, $\mu(X + c1^n) = \mu(X) + c$). Assim, $A_{BDK}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^1$, onde para todo $n \in \mathbb{C}$, $X \in \mathbb{R}_+^n$ é dado por:

$$A_{BDK}^n(X) = \mu(X) - \mu_{\mathbb{3}}(X)$$

A_{BDK} é contínuo, estritamente convexo e maior ou igual a 0. Ele fornece a renda per capita que poderia ser poupada sem qualquer perda de bem-estar se a sociedade distribui rendas igualmente.

A_{BKS} pode ser interpretado como a perda absoluta de bem-estar que surge devido à existência da desigualdade. Do ponto de vista da implementação de políticas públicas, o índice absoluto determina o custo total da desigualdade, no sentido do que nos diz quanto deve ser adicionado, em termos absolutos, à renda de todos os membros da população para alcançar o mesmo nível de bem-estar que existiria se todos ganhassem o equivalente à renda média da população.

O índice absoluto considerado por Kolm (1976) é dado por:

$$A_{\alpha}^n = \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\alpha(\mu-x_i)} = \mu(X) - \left[-\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i} \right]$$

Com $\alpha > 0$ e onde $n \in \mathbb{N}$ e $X \in \mathbb{R}_+^n$ são dados arbitrariamente.

A função de bem-estar social $W_{\alpha}^n(X) = \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i}$ foi sugerida por Polak (1971).

Logo, vê-se que o índice de Kolm é um caso particular do A_{BDK} , que satisfaz o axioma da sensibilidade á transferência para todo $\alpha > 0$.

Usando as funções de bem-estar social de Gini, podemos obter o Índice Absoluto de Gini, que é dado por:

$$A_G^n(X) = \mu(X) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (2(n-i)+1)x_i^*$$

Chakravarty and Dutta (1987) provaram que funções de bem-estar homotéticas são úteis para se medir a distância econômica entre duas distribuições. Supõe-se que tal distância reflita o grau de influência ou bem-estar de uma população em relação a outra. Eles caracterizaram $|\mu_{\gamma}(Y) - \mu_{\gamma}(X)|$ como um índice de distância econômica entre as distribuições de renda Y e X, onde W é distribuída homogeneamente.

4.3.3 - Medidas de Entropia Generalizada (Índices de Theil - 1967)

Uma outra classe de indicadores de desigualdade de interesse é aquela baseada em Medidas de Entropia Generalizada, assim definida:

$$GE(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu} \right)^{\alpha} - 1 \right]$$

Os valores de GE variam entre 0 (distribuição igualitária) e ∞ (extrema desigualdade). O parâmetro α representa o peso dado às distâncias entre rendas de diferentes partes da distribuição, podendo tomar qualquer valor real. Para baixos valores de α , GE é mais sensível a mudanças na cauda inferior da distribuição e para valores mais altos de α , GE é mais sensível a mudanças na cauda superior.

Os valores mais comumente usados para α são 0, 1 e 2.

Para $\alpha = 1$, $GE(1)$ é denominado Índice T de Theil e é escrito como:

$$GE(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu}\right) \ln\left(\frac{x_i}{\mu}\right)$$

$GE(0)$, também conhecido como Índice L de Theil, é chamado de medida do desvio do log da média porque fornece o desvio padrão do $\log(x)$:

$$GE(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\mu}{x_i}\right)$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Medir e analisar a pobreza e a desigualdade é de extrema importância para os estudos de bem-estar social, seja para fins analíticos (referentes à definição dos fatores que determinam tais condições), seja para o desenvolvimento de estratégias de implementação de políticas de intervenção melhores adaptadas a tais situações e de indicadores que permitam uma posterior avaliação dos resultados de tais políticas.

Assim, “conhecer” a pobreza e a desigualdade é importante para 1º- desenvolver estratégias de crescimento; 2º- analisar e reavaliar gastos sociais; e 3º - definir políticas de intervenção (educacionais, de emprego, de redução de desigualdades, etc.) e analisá-las.

Este artigo focou as questões analíticas (por meio de uma análise teórica) referentes à mensuração e ao entendimento da pobreza e da desigualdade na dimensão da renda. Nesse sentido, foram apresentados os axiomas da pobreza e os princípios básicos que norteiam a construção dos indicadores de desigualdade, e desenvolvidos e analisados os índices de pobreza e de desigualdade mais utilizados e os fundamentos matemáticos e estatísticos necessários à execução da análise dos dados de renda.

Trabalhos futuros deverão promover uma análise teórica da ordenação da pobreza e da decomposição das medidas de desigualdade e a importância delas para o estudo dos determinantes da pobreza e da desigualdade. Ao estudar a ordenação de distribuições, os conceitos de dominância estocástica devem ser introduzidos e analisados a fundo, definindo-se a relação entre as várias ordens de dominância de um lado e as classes de índices de bem-estar social de outro.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Atkinson, A. B. and Bourguignon, F. (1982). The comparison of multi-dimensioned distributions of economic status, *Review of Economic Studies*, 49, 183-201.
- Atkinson, A.B. (1987). "On the Measurement of Poverty," *Econometrica*, Vol. 55, nº 4, pp. 749-764.
- Atkinson. A. B. (1970). On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.
- Bibi, S. (2003). Measuring poverty in a multidimensional perspective, a review of literature, University of Laval.
- Blackorby, C. and Donaldson, D. (1980). Ethical indices for the measurement of poverty, *Econometrica*, 48, 1053-1060.
- Bourguignon, F. and Chakravarty, S. R. (1999). A family of multidimensional poverty measures, in D.J.Slottje(ed.) *Advances in Econometrics, Income Distribution and Scientific Methodology, Essays in Honor C.Dagum*, Physica -Verlag: Heidelberg.
- Bourguignon, F. and Chakravarty, S. R. (2003). Measurement of multidimensional poverty, *Journal of Economic Inequality*, 1, 25-49.
- Chakravarty, S. R (1983). Ethically flexible measures of poverty, *Canadian Journal of Economics*, 16, 74-85.
- Chakravarty, S.R. (2003). A generalized human development index, *Review of Development Economics*, 7, 99-114.
- Chakravarty, S.R , Mukherjee, D. and Ranade, R. (1998). On the family of subgroup and factor decomposable measures of multidimensional poverty, *Research on Economic Inequality*, 8, 175-194.
- Chakravarty, S.R, and Dutta, B. (1987). A note on measures of distance between income distributions, *Journal of Economic Theory*, 41, 185-189.
- Chakravarty, S.R, and Muliere, P. (2003a). Welfare indicators: a review and new perspectives. I. Measurement of Inequality, *Metron*, 61, 1-41.
- Chakravarty, S.R, and Muliere, P. (2003b). Welfare indicators: a review and new perspectives. II. Measurement of Poverty, *Metron*, 62, 1-44.

- Clark, S., Hemming, R. and Ulph, D. (1981). On indices for the measurement of poverty, *Economic Journal*, 91, 515-526.
- Cowell, F. A. (1998). Measurement of Inequality, in A.B. Atkinson and Bourguignon(eds.) *Handbook of Income Distribution*, North –Holland.
- Dalton, H. (1920). The measurement of inequality of incomes, *Economic Journal*, 30, 348-361.
- Foster, J. E., Greer, J. and Thorbecke, E. (1984). “A Class of Decomposable Poverty Indices”, *Econometrica* 52, pp.761-766.
- Foster, J. E. and Shorrocks, A.F. (1991). Subgroup consistent poverty in-dices, *Econometrica*, 59, 687-709.
- Giorgi, G. M. and Crescenzi, M. (2001). A proposal of poverty measures based on the Bonferroni inequality index, *Metron*, 59, 3-15.
- Haagenars, A.J.M. (1987). A class of poverty measures, *International Economic Review*, 28, 583-607.
- Hamada, K. and Takayama, N. (1977). Censored income distribution and measurement of poverty, *Bulletin of the International Statistical Institute*, 47, 617-632.
- Kakwani, N.C. (1980a). *Income Inequality and Poverty: Methods of Estimation and Policy Applications*, Oxford University Press: London.
- Kakwani, N.C. (1980b). On a class of poverty measures, *Econometrica*, 48, 437-446.
- Kolm, S.C. (1976). Unequal inequalities, *Journal of Economic Theory*, 12, 416-442.
- Kolm, S.C. (1977). Multidimensional egalitarianism, *Quarterly Journal of Economics*, 91, 1-13.
- Maasoumi, E. (1989). Composite indices of income and other development indicators: a general approach, *Research on Economic Inequality*, 1,269-286.
- Mosler, K. (1996). Multidimensional welfarism, in W.Eichhorn(ed.) *Models and Measurement of Welfare and Inequality*, Springer-Verlag, New York.
- Pigou, A.C. (1912). *Wealth and Welfare*, Macmillan: London.
- Sen, A. K. (1976). “Poverty: An Ordinal Approach to Measurement”. *Econometrica*, Vol. 44, N.º 2, p. 219-231.

- Sen, A. K. (1979). Issues in the measurement of poverty, *Scandinavian Journal of Economics*, 81.
- Sen, A. K. (1987). *Standard of Living*, Cambridge University Press: Cambridge.
- Shorrocks, A. F. and Foster, J.E. (1987). Transfer sensitive inequality measures, *Review of Economic Studies*, 54, 485-497.
- Silber, J. (1999)(ed.). *Handbook of Income inequality Measurement*, Kluwer Academic :Boston.
- Slottje, D.J. (1991). Measuring quality of life across countries, *Review of Economics and Statistics*, 73,684-893.
- Theil, H. (1967). *Economics and Information Theory*, North-Holland:Amsterdam.
- Tsui, K.Y. (2002). Multidimensional poverty indices, *Social Choice and Welfare*, 19, 69-93.□
- UNDP (1991 - 2002). *Human Development Report*, Oxford University Press: Oxford.
- Vaughan, R. (1987). Welfare approaches to the measurement of poverty, *Economic Journal*, 98, 160-170.
- Watts, H. W. (1968). An economic definition of poverty, in D. P. Moynihan(ed.) *On Understanding Poverty*, Basic Books: New York.

Ensaio Anteriore:

- Ensaio 1: Crescimento Econômico, Pobreza e Desigualdade de Renda: o que Sabemos Sobre Eles?

Obs: Todos os Ensaaios Sobre Pobreza se encontram disponíveis no site:
www.lepcaen.com.br